

## Putkiristikko joustavin liitoksin

Markku Heinisuo, Aku Pihlasvaara

Metallirakentamisen tutkimuskeskus, Tampereen teknillinen yliopisto

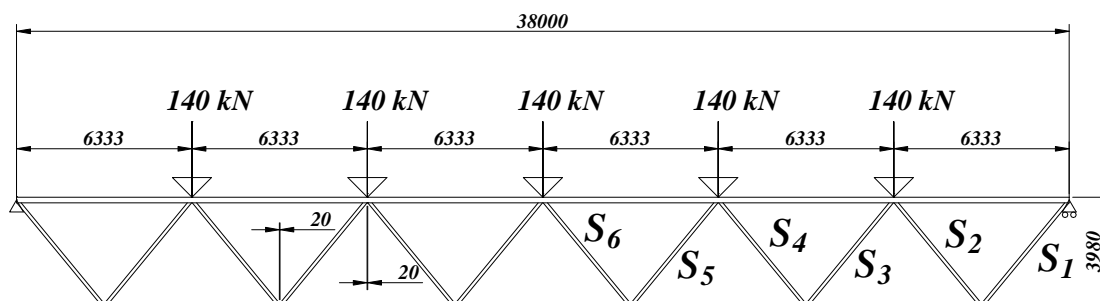
### Yhteenveto

Artikkelissa esitetään teräsputkiristikon laskentatulokset, kun uumasauvojen ja paarteiden välinen liitos oletetaan joustavaksi. Kirjoitus on jatkoa artikkeliin [1]. Liitosten jousto ja epäkeskisyys otetaan huomioon viimeisimpiä tutkimustuloksia käyttäen. Vertailulaskelmat tehdään käyttäen noin 200 vuotta vanhaa nivelpistemenetelmää olettaen kaikki ristikon liitokset niveliksi. Laskelmat on tehty toisen kirjoittajan tekniikan kandidaatin lopputyössä. Liitosjäykkyydellä ei ole merkitystä esimerkin tapauksessa ristikon sauvavoimiin. Kaikkien puristettujen sauvojen vertailujännitykset pienenevät, kun käytetään uusia kaavoja ja kehäteoriaa verrattuna nivelpistemenetelmän tuloksiin. Kaikkien vedettyjen sauvojen jännitykset kasvavat suurimmillaan 17% modernilla teorialla. Lopuksi esitetään yksi ratkaisematon ongelma: kuinka määritellään ominaismuodoista ne, joilla yksittäiset sauvat nurjahtavat?

**Avainsanat:** Teräsputkiristikko, liitosjäykkyys, ominaisarvot.

### Klassinen ristikkoteoria

Tarkastellaan tasoristikkoa, joka on koottu hitsaamalla ylä- ja alapaarteiden väliin uumasauvat. Sauvat ovat kylmämuovattuja neliöteräsputkia ja teräslaatu on S355. Uumasauvojen ja paarteiden liitokset oletetaan välilyöntiliitoksiksi ja välilyönti on vakio 20 mm. Ristikon mitat, tuenta ja murtorajatilan kuormitus on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1. Tarkasteltu putkiristikko, mitat millimetreissä.

Määritellään ristikon sauvavoimat käyttäen noin 200 vuotta vanhaa ristikkoteoriaa (Ritter et al), ns nurkkapistemenetelmää, olettaen kaikkiin solmupisteisiin nivelet ja liitosepäkeskisyys ei oteta huomioon. Menetelmä on itse asiassa vieläkin kauemmin tunnettu. Leonardo da Vincin papereista on löydetty nurkkapisteiden tasapainopiirustuksia. Oletetaan yläpaarteiden kooksi 200x200 ja alapaarteeksi 160x160 jolloin voidaan määrittellä sauvojen keskiviivat. Tuloksena on taulukon 1 sauvavoimat.

Taulukko 1. Sauvavoimat klassisen ristikkoteorian mukaan.

Sauva	Yläpaarre	Alapaarre	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>	S <sub>6</sub>
Sauvavoima (kN)	992	1050	456	456	273	273	91	91
	Pur	Veto	Veto	Pur	Veto	Pur	Veto	Pur

Sauvojen jännitykset lasketaan perinteisellä lujuusopin kaavalla:

$$\sigma = \frac{N}{\chi A} + \frac{M}{W} \leq f_y \quad (1)$$

missä

- $N$  on sauvan normaalivoima,
- $A$  on sauvan poikkileikkauksen pinta-ala,
- $\chi$  on nurjahduskerroin,
- $M$  on sauvan taivutusmomentti,
- $W$  on sauvan poikkileikkauksen kimmoteorian mukainen taivutusvastus ja
- $f_y$  on sauvan materiaalin myötöraja, kun materiaalikerroin on 1.

Klassisen ristikkoteorian mukaan sauvojen taivutusmomentit ovat nollia tässä tapauksessa, kun kuormitusta ei ole solmujen väleissä. Klassisessa ristikkoteoriassa sauvojen nurjahduspituudet ovat solmuvälit. Nurjahduskerroin  $\chi$  määritellään tässä Eurokoodin [2] mukaan. Laskelmien jälkeen saadaan taulukon 2 mukaiset jännitykset taulukon 2 sauvojen poikkileikkauksilla kaavan (1) mukaan.

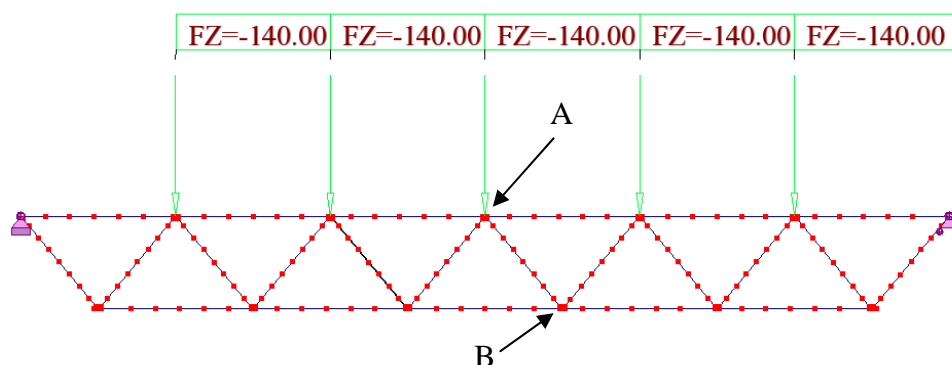
Taulukko 2. Sauvojen normaalijännitykset klassisen ristikkoteorian mukaan.

Sauva	Yläpaarre	Alapaarre	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
Koko	200x200x 8	160x160x 6	120x120x 4	140x140x 6	120x120x 4	120x120x 5	120x120x 4	120x120x 4
$\sigma$ /MPa	334	291	251	312	150	320	50	130

Taulukosta 2 nähdään, että kaikki sauvat ovat käypiä, koska jännitykset ovat alle myötörajan 355 MPa.

### Moderni kehäteoria

Seuraavaksi laskentamalli tehdään lineaariseen kehäteoriaan perustuen käyttäen Euler-Bernoulli-sauvaelementtejä FEM-laskennassa. Liitoksissa käytetään hollantilasten kehittämää uutta paikallista mallia, jossa liitosepäkeskisyyys ja liitoksen jousto momentin suhteen otetaan huomioon [3]. Laskenta tehdään Autodesk® Robot™ Structural Analysis Professional Version 22.0.0.2950 ohjelmalla. Kuvassa 2 on laskentamalli.



## Kuva 2. Laskentamalli.

Kuvassa 2 on esitetty laskentasolmut, joita on paljon, koska jatkossa lasketaan myös ominaisarvotehtäviä. Laskentatuloksista voidaan poimia tulokset. Taulukossa 3 on sauvojen normaalivoimat ja taivutusmomentit. Yläpaarteiden rasitukset on annettu pisteessä A ja alapaarteiden pisteessä B (katso kuvaa 2).

Taulukko 3. Sauvojen rasitukset modernin kehäteorian mukaan.

Sauva	Yläpaarre	Alapaarre	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
Sauvavoima (kN)	990 Pur	1047 Veto	454 Veto	457 Pur	275 Veto	273 Pur	91 Veto	91 Pur
Momentti (kNm)	5,80	7,64	2,89	7,47	1,27	1,05	0,92	0,44

Taulukosta 3 nähdään, että sauvojen normaalivoimat ovat lähes samat kuin taulukossa 1. Sauvojen normaalijännitykset lasketaan kaavalla (1), mutta puristettujen sauvojen nurjahduspituuksina käytetään lähteen [3] kaavoja:

$$Paarre : L_{cr0} = (1,25 - 0,6 \cdot \beta) \cdot L_{sys0}$$

$$Uumasauva : L_{cr1} = \left[ (1,05 + 0,025\gamma) \cdot \left( \beta \cdot \frac{b_1}{L_{sys1}} \right)^{0,14} \right] \cdot L_{sys1} \quad (2)$$

missä

- $\beta = (b_1/b_0)$
- $\gamma = b_0/(2t_0)$

ja  $b_0$  ja  $b_1$  ovat paarteiden ja uumasauvan korkeudet (tässä 200, 160 sekä 140 ja 120 mm),  $t_0$  on paarteiden seinämän paksuus (tässä 8 ja 6 mm), ja  $L_{sys0}$  ja  $L_{sys1}$  ovat paarteiden ja uumasauvan systeempituudet lähteen [3] mukaan (tässä 6163 ja 4695 mm). Yläpaarteiden kerroin on laskettu ristikon keskikohdalla käyttäen uumasauvan korkeutta 120 mm. Uumasauvojen kertoimet on laskettu käyttäen alapaarteiden mittoja kaavoissa (2). Kertoimet kaavassa (2) ovat tässä tapauksessa yläpaarteelle 0,89 ja uumasauvoille  $S_2$  0,83 sekä  $S_4$  ja  $S_6$  0,80. Nurjahduspituuksien avulla lasketaan normaalijännitysten korotuskerroin  $1/\chi$  Eurokoodien mukaan, kuten edellä. Kaavan (1) mukaan saadaan taulukon 4 jännitykset sauvoille.

Taulukko 4. Sauvojen normaalijännitykset modernin kehäteorian mukaan.

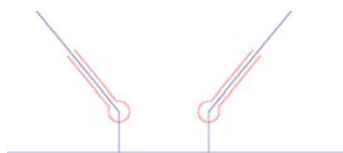
Sauva	Yläpaarre	Alapaarre	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
Koko	200x200x 8	160x160x 6	120x120x 4	140x140x 6	120x120x 4	120x120x 5	120x120x 4	120x120x 4
$\sigma$ /MPa Pur/veto	286	290	251	254	150	240	50	97
$\sigma$ /MPa Taiv	16	44	43	57	19	13	14	7
$\sigma$ /MPa Yht	302	334	294	311	169	253	64	104

Vertaamalla taulukon 4 jännityksiä taulukon 2 jännityksiin nähdään, että kaikkien puristettujen sauvojen jännitykset ovat pienemmät käyttäen modernia kehäteoriaa

verrattuna klassiseen teoriaan ja kaikkien vedettyjen sauvojen jännitykset ovat suuremmat. Suurin kasvu on sauvassa  $S_7$ : 17%. Alapaarteiden jännitykset kasvavat modernilla teorialla 15 %. Eli lopputulos on se, että modernilla teorialla on ilmeisesti mahdollista pienentää joitakin puristettuja sauvoja ja tulee kasvattaa joitakin vetosauvoja, jos verrataan tuloksia klassisen teorian tuloksiin. Tässä esimerkissä liitosepäkeskisyys ja liitoksen jousto on otettava huomioon alapaarteiden mitoituksessa, toisin kuin Eurokoodissa sanotaan. Käytetty moderni kehäteoria on samankaltainen kuin puuristikoiden on ollut rutiinikäytössä yli 10 vuotta [4].

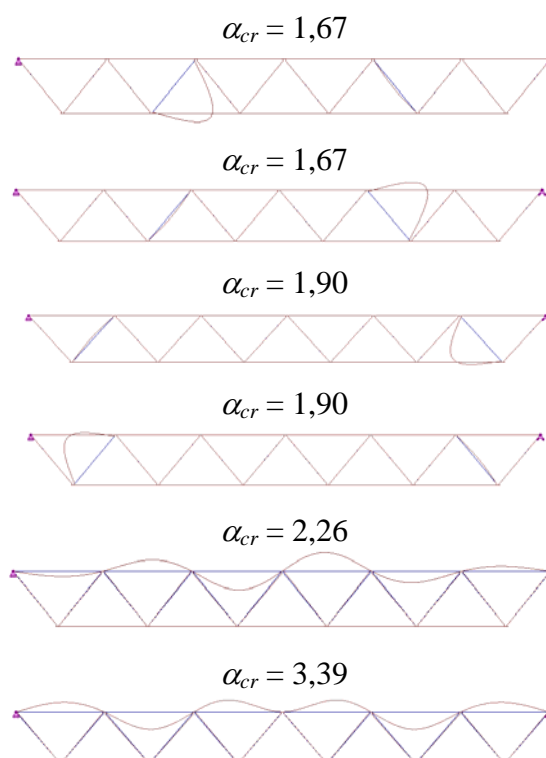
### Nurjahduspituuden määrittäminen

Tarkastellaan seuraavaksi nurjahduspituuden määrittämistä testaten kaavoja (2) tässä tapauksessa. Laskentamallina käytetään kuvan 2 kehämallia ja samaa ohjelmaa kuin edellä. Johdantona lasketaan ristikon 6 alinta positiivista ominaisarvoa asettaen uumasauvojen päihin nivelet. Yhden alapaarrelliitoksen paikallinen laskentamalli on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3. Alapaarrelliitoksen paikallinen laskentamalli, katso [1] ja [3].

Kuvassa 4 on esitetty kuuden alimman ominaisarvon kuvaajat ja ominaisarvot.



Kuva 5. Ristikon ominaismuodot ja -arvot, kun uumasauvojen päät ovat niveliset.

Näistä voidaan tehdä seuraavat päätelmät. Ominaisarvot 1 ja 2 vastaavat sauvan  $S_4$  nurjahdusta. Ominaisarvot 3 ja 4 vastaavat sauvan  $S_2$  nurjahdusta. Ominaisarvo 5

vastaa yläpaarten antimetristä nurjahdusta ja ominaisarvo 6 vastaa yläpaarten symmetristä nurjahdusta. Käytetään ominaisarvoja sauvojen nurjahduspituuksien laskentaan Eulerin kaavalla:

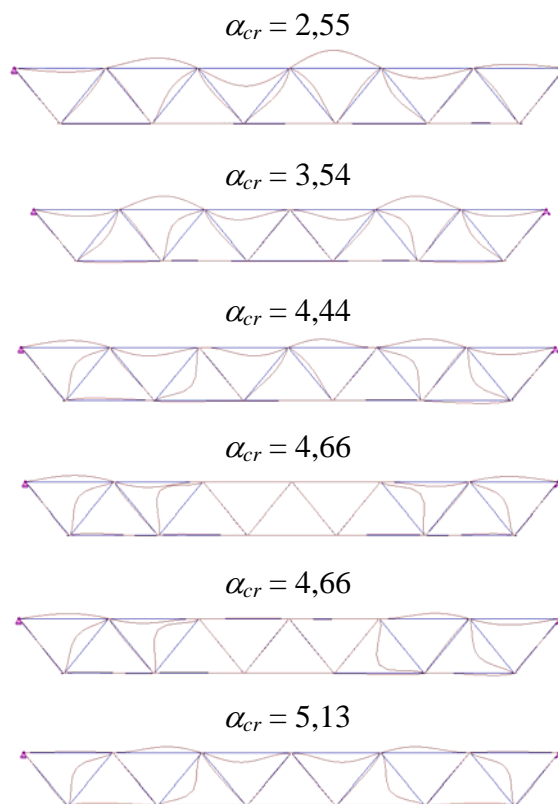
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2} \Rightarrow L_{cr} = \pi \sqrt{\frac{EI}{N_{cr}}} = \pi \sqrt{\frac{EI}{\alpha_{cr} N}} \quad (3)$$

missä

- $EI$  on sauvan taivutusjäykkyys,
- $\alpha_{cr}$  on ominaisarvo,
- $N$  on sauvan normaalivoima.

Kun kaavaan (3) sijoitetaan numeroarvot, niin sauvoilla  $S_2$  ja  $S_4$  saadaan hyvin tarkasti nurjahduspituus 4695 mm eli  $L_{sys1}$  edeltä ja yläpaarteelle (antimetrisen muoto) saadaan tulos 5748 mm eli  $0,93L_{sys0}$ . Uumasauvojen tulos ei ole mikään yllätys. Ominaismuodoista nähdään, että nivelpäiset uumasauvat nurjahtavat kuten Eulerin pilarit. Yläpaarten tulos on eräänlainen maksimi ristikolle.

Toistetaan sama laskelma käyttäen liitoksissa joustoja hollantilaisten mukaan eli käytetään edellä olevaa modernia kehäteoriaa. Kuusi ensimmäistä ominaismuotoa ja ominaisarvoa on esitetty kuvassa 5.



Kuva. 6. Ristikon ominaismuodot ja  $\alpha$ -arvot, kun uumasauvojen päät ovat joustavat.

Käytetään ensimmäistä ominaismuotoa yläpaarteen nurjahduspituuden laskentaan. Kaavalla (3) saadaan tulos  $0,88L_{sys0}$  eli lähes sama kuin kaavasta (2). Uumasauvojen nurjahdusmuoto on hankala nähdä ominaismuodoista. Varmalla puolella oleva tulos saadaan, kun kaikille sauvoille käytetään alinta ominaisarvoa. Edellisestä tapauksesta (uumasauvojen päät niveliä) nähdään, että näin ei kannata aina menetellä. Jos käytetään alinta muotoa sauvojen  $S_2$  ja  $S_4$  nurjahduspituuksien määrittämiseen joustavien liitosten tapauksessa, niin saadaan sauvalle  $S_2$  tulos  $0,81L_{sys1}$  ja sauvalle  $S_4$  tulos  $0,86L_{sys1}$ . Kaavasta (2) saatiin kerroin 0,83 sauvalle  $S_2$  ja kerroin 0,80 sauvalle  $S_4$ . Eli kaavojen (2) tulokset näyttävät luotettavilta tässä tapauksessa. Jos käytetään toista ominaisarvoa sauvoille  $S_2$  ja  $S_4$ , niin saadaan kertoimet 0,73 ( $S_2$ ) ja 0,69 ( $S_4$ ).

Ratkaisematon ongelma lienee se, kuinka voidaan määrittää erillisten sauvojen nurjahduspituudet ominaisarvoista yleisessä tapauksessa, kun sauvojen muodot ovat enemmän tai vähemmän sotkeutuneet toisiinsa. Tällä ratkaisulla olisi käyttöä kehien stabiilisuustehtävien ratkaisussa, kuten edellä on esitetty. Varmalla puolella oleva ratkaisu on käyttää alinta muotoa kaikkien sauvojen tarkasteluun, mutta se ei aina ole järkevää. Vastaavia tapauksia esiintyy monissa kehärakenteissa, ei vain ristikoissa. Lähteessä [5] on pohdittu samaa ongelmaa, kun kehä koostuu pilareista ja kattoristikoista. Sama ongelma on myös edessä, kun mietitään Eurokoodien kertoimen  $\alpha_{cr}$  käyttöä kehien toisen kertaluvun vaikutusten huomioon ottamisessa. Toistaiseksi ainoa löydetty ratkaisu on piirtää ominaismuodot ja päätellä niistä, mikä osa milloinkin nurjahtaa (katso esimerkiksi kuva 5). Kun kehitetään automatisoitua suunnittelumenetelmää, kuten on tehty lähteessä [5], niin huono puoli tässä menetelmässä on se, että suunnittelijan on manuaalisesti ohjattava ratkaisua.

### **Kirjallisuus**

- [1] Heinisuo M., Salminen M., Onko putkiristikon hitsattu nurkkaliitos nivel vai jäykkä? Julkaisematon käsikirjoitus, 2011.
- [2] EN 1993-1-1, Eurocode 3: Design of steel structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN, Bryssels, 2005.
- [3] Snijder H., Boel H., Hoenderkamp J., Spoorenberg R., Buckling length factors for welded lattice girders. EUROSTEEL 2011, Proceedings of 6<sup>th</sup> European Conference on Steel and Composite Structures, Eds Dunai L., Ivanyi M., Jarmai K., Kovacs N., Vigh L., August 31-September 2, ECCS, Budabest, 2011. pp. 1881-1886.
- [4] Heinisuo M., Kytömäki R., Laurila M., Uusi analyysimalli naulalevyrakenteille integroidussa CAD-systeemissä, Proceedings of the Finnish Mechanics Days, Tampere University of Technology, 26.5.2000, Tampere, 2000.
- [5] Heinisuo M., Möttönen A., Paloniemi T., Nevalainen P., Automatic design of steel frames in a CAD-system, Proceedings of the 4<sup>th</sup> Finnish Mechanics days, June 5-6, 1991, Lappeenranta, Finland, 1991.